THALES

1 Graduation de la droite

Exercice 1

Avec l'axiome de la distance, construire une bijection d'une droite d *vers* $\mathbb{R}$ *respectant l'ordre des points et des nombres. On peut établir plusieurs bijections sur une même droite.*

Définition 1 On appelle **graduation** d'une droite d toute bijection de d sur $\mathbb{R}$ qui respecte l'ordre des points et des nombres.

<u>Remarques</u>

1 Si la bijection est construite avec l'axiome de la distance, elle se nomme **graduation associée à la distance.**

2 Avec $g : d \to \mathbb{R}$

$$A \mapsto x = g(A)$$

une graduation g est une application, donc un triplet $g = (d, \mathbb{R}, G)$ et $(A,x) \in G$ avec $g(A) = x$.

3 Une graduation ne peut pas être la même pour deux droites différentes d_1 et d_2 car $(d_1, \mathbb{R}, G_1) \neq (d_2, \mathbb{R}, G_2)$.

Définition 2 Si g est une graduation de d avec $g(O) = 0$, $g(I) = 1$ et $g(C) = \mathbf{x}$, alors
O s'appelle **point origine** de la graduation et I le **point unité**,
le couple (O, I) est le **repère** de la graduation,
le nombre **x** est **l'abscisse** du point C dans la graduation g,
le nombre $g(B) - g(A) = \overline{AB}_g$ s'appelle **mesure algébrique** du **bipoint** (A,B) dans la graduation g.

Remarque

S'il n'y a pas de confusion sur la graduation, on écrit $\overline{AB}$ au lieu de $\overline{AB}_g$.

Exercices

2 M *milieu de* [A,B] *ou de* (A,B) $\Leftrightarrow$ $\overline{AM} = \overline{MB}$ $\Leftrightarrow$ $g(M) = \dfrac{g(A) + g(B)}{2}$ *(Théorème de la "demi-somme" pour le milieu).*

3 *Soit* $\{C,D,E,F\} \subset (AB)$ *avec* (C,D) *repère de la graduation* g. *Qu'est-ce que* g(C), g(D) ? *On donne* $g(A) = 3$, *l'abscisse de* B *est* 8, F *est le milieu de* [A,B], E *celui de* [C,D]. *Calculer* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$, g(E), g(F), $\overline{AE}$, $\overline{EF}$.

4 $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{BA} \Leftrightarrow A = B$.

6 $\overline{AB} = - \overline{BA}$

6 $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ *pour des points alignés (Chasles)*.

7 *Si* g *est assiociée à la distance* δ, $|\overline{AB}_g| = \delta(A,B)$. *Démontrer que l'on a* $A \preceq B \Leftrightarrow \delta(A,B) = \overline{AB}$ *et* $B \preceq A \Leftrightarrow \delta(A,B) = -\overline{AB} = \overline{BA}$.

Pour changer de graduation sur une même droite d, on doit pouvoir déplacer l'origine de la graduation et modifier la "longueur du pas" en variant la distance des points du repère. Les exercices suivants illustrent ces transformations dont la formulation générale est proposée par un axiome.

Exercices

8 *On donne une graduation* g *de* d. *Si* $\{A, B, C\} \subset d$, *pour* $M \in d$, *on pose* $g_1(M) = g(M) + 2$ *avec* $g(A) = -2$, $g(B) = 4$ *et* $g(C) = -1$. *Démontrer que* g_1 *est aussi une graduation de* d. *Dessiner* (O,I), *le repère de* g *et* (O_1, I_1) *celui de* g_1. *Calculer les abscisses de* A, B *et* C *dans la graduation* g_1. *A-t-on* $\overline{AB}_{g_1} = \overline{AB}_g$?

9 *Si* (O,I) *est le repère de la graduation* g *associée à la droite* d *et* $g_1(M) = 3g(M)$, *quelles seront les nouvelles abscisses de* O *et* I *dans la graduation* g_1 ? *Dessiner le repère de* g_1. *Si* $|\overline{AB}_g| = \delta(A,B)$, *a-t-on aussi* $|\overline{AB}_{g_1}| = \delta(A,B)$?

10 *Le repère de la graduation* g *est* (O,I) *et on donne* $\forall\ M \in d \quad g_1(M) = -2\,g(M) + 4$ avec $g(A) = 3$, $g_1(B) = 7$, $g(C) = -4$. *Dessiner* A, B, C, O_1, I_1. *Calculer* $g_1(A)$, $g_1(C)$. *Démontrer que* g_1 *est une bijection. Quelle est l'influence du coefficient* -2 *sur les abscisses des points? Et celle de* 4 ? *Comparer* $|\overline{AB}_g|$ *et* $|\overline{AB}_{g_1}|$.

Pour changer de graduation sur une même droite d, on admet l'axiome suivant.

AXIOME DU CHANGEMENT DE GRADUATION

Si g_1 ou g_2 est une graduation de d associée à la distance, alors il existe deux réels α et β tels que, quel que soit $M \in d$, $g_2(M) = \alpha \cdot g_1(M) + \beta$.

Exercices

11 *Pour l'axiome du changement de graduation, démontrer que*
$\alpha \neq 0$ *et* $g_1 = g_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha, \beta) = (1, 0)$

12 *Si* $g_2(M) = 3 \cdot g_1(M) + 4$ *et* $g_1(A) = 0$ *et* $g_1(B) = 1$ *et* $g_1(C) = 5$, *trouver les abscisses de* A, B *et* C *dans la graduation* g_2. *Dessiner le repère de* g_2. *Trouver* $g_1(D)$ *si* $g_2(D) = 10$.

Si g_1 *est associée à la distance* δ, *alors* $|\overline{AB}_{g_2}| \neq \delta(A,B)$.

Existe-t-il un point E *tel que* $g_1(E) = g_2(E)$?

13 *Si* $g_2(M) = \alpha \cdot g_1(M) + \beta$, *existe-t-il un point* E *tel que* $g_1(E) = g_2(E)$?

14 *Si* $g_2(M) = \alpha \cdot g_1(M) + 4$, *trouver* α *si* A *est le point unité de* g_1 *et* g_2.

15 *Si* (A,B) *est le repère de* g_1 *et* (B,A) *celui de* g_2 *et si* $g_1(C) = 3$ *et* $g_2(D) = -4$, *trouver* $g_1(D)$ *et* $g_2(C)$. *Calculer* α *et* β *si* $g_1(M) = \alpha \cdot g_2(M) + \beta$

16 *Si* $g_1(A) = 2$, $g_1(B) = -3$, $g_2(A) = 4$ *et* $g_2(B) = 9$, *trouver* α *et* β. *Calculer* $\overline{AB}_{g_1}$ *et* $\overline{AB}_{g_2}$.

17 *Si* (A,B) *est le repère de* g_2 *et* $g_1(A) = 3$, $g_1(B) = -2$, $g_1(C) = 5$ *et* $g_2(D) = 6$, *trouver* $g_1(D)$, $g_2(C)$, *calculer* $\overline{DC}_{g_1}$ et $\overline{DC}_{g_2}$. *Calculer* α *et* β *si* $g_1(M) = \alpha \cdot g_2(M) + \beta$, puis *calculer* α' *et* β' *si* $g_2(M) = \alpha' \cdot g_1(M) + \beta'$.

18 *Si* $g_1(A) = 2$, $g_1(B) = -3$, $g_2(A) = 4$ *et* $g_2(B) = 10$, *trouver* α *et* β. *Calculer* $\overline{AB}_{g_1}$ *et* $\overline{AB}_{g_2}$, *dessiner le repère de* g_2.

19 *Le changement de graduation conserve le théorème de l'abscisse du milieu d'un bipoint.*

THEOREME 1 Si g_1 et g_2 sont deux graduations de d et $C \neq D$, alors

$$\frac{\overline{AB}_{g_2}}{\overline{CD}_{g_2}} = \frac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}}$$

Le rapport des mesures algébriques est invariant relativement au changement de graduation d'une droite.

Exercices

20 *Si* $g_1(A) = 2$, $g_1(B) = 5$, $g_1(C) = 3$ *et* $g_2(A) = 4$, $g_2(B) = -8$, *calculer* $g_2(C)$.

21 *Si* $g_1(A) = -2$, $g_1(B) = 6$, *et* $g_2(A) = 4$, $g_2(B) = 10$, *et* $g_1(C) = g_2(C)$, *calculer* $g_2(C)$. *Si* M *est le milieu de* [A,B], *calculer* $g_1(M)$ *et* $g_2(M)$. *Trouver* D *si* $g_1(D) = 3g_2(D)$.

22 *Pour une droite* d, *on donne* $\dfrac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{AC}_{g_1}} = 3$, $g_2(A) = 5$ *et* $g_2(C) = 7$. *Calculer* $g_2(B)$.

2 Graduations et projections

Lorsque le soleil projette les points d'une règle transparente sur une feuille de papier, les ombres des nombres correspondant aux points de la règle se retrouvent associées aux ombres des points de la règle. En géométrie, on parle de projection parallèle d'une droite sur une autre et l'axiome suivant précise dans quelle condition a lieu cette application.

AXIOME **Axiome de Thalès**

Si, lors d'une projection parallèle d'une droite sur une autre, les repères des graduations respectives se correspondent, alors tout point et son image ont la même abscisse.

Exercices

g_1 *et* g_2 *sont les graduations respectives de* d_1 *et* d_2 *, et* A', B', C', D', E' *les images respectives de* A, B, C, D, E *par une projection parallèle de* d_1 *sur* d_2 .

23 *Si* $g_1(A) = 0$, $g_1(B) = 1$, $g_1(C) = 3$, $g_2(A') = 1$, $g_2(B') = 0$, *calculer* $g_2(C')$.

24 *Si* $g_1(A) = 2$, $g_1(B) = 4$, $g_1(C) = 8$, $g_2(A') = 0$, $g_2(B') = 1$, *calculer* $g_2(C')$.

25 *Si* $g_1(A) = -5$, $g_1(B) = 2$, $g_1(C) = 4$, $g_2(A') = 3$, $g_2(B') = -1$, $g_2(D') = 7$, *calculer* $g_2(C')$ *et* $g_1(D)$. *Trouver* x *si* $g_1(E) = x = g_2(E')$.

26 *Formuler l'axiome de Thalès avec des symboles mathématiques. Pourquoi la projection utilisée pour l'axiome de Thalès est-elle bijective?*

27 *Que devient l'axiome de Thalès si l'on projette une droite sur elle-même?*

THEOREME 2 Théorème de Thalès

Si g_1 et g_2 sont les graduations respectives de d_1 et d_2 et A', B', C', D', les images respectives de A, B, C, D par une projection parallèle de d_1 sur d_2 , alors $\dfrac{\overline{AB}_{g_1}}{\overline{CD}_{g_1}} = \dfrac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{C'D'}_{g_2}}$ avec $C \neq D$ et $C' \neq D'$. Le rapport des mesures algébriques est conservé lors d'une projection parallèle.

Exercices

28 *Que devient ce théorème si* $A = B$ *; si* $A = C$ *ou* $B = C$ *?*

29 *Avec* $g_1(A) = 3$, $g_1(B) = 5$, $g_1(C) = 10$, *on donne* $(AB) \cap (AD) = \{A\}$, $C \in (AB)$, $p_{(BD)}(C) = F \in (AD)$, E *milieu de* [D,F] *et* $p_{(BD)}(E) = G \in (AB)$. *Si* (A,D) *est le repère de* g_2 , *calculer* $g_2(F)$ *et* $g_1(G)$.

COROLLAIRE Le rapport des mesures algébriques est indépendant du choix des graduations mais dépend du choix des points.

Remarques

1 Pour ce rapport, on peut omettre la mention des graduations et poser $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

2 Si $A \neq B$ et $C \neq D$, $\dfrac{\overline{A'B'}_{g_2}}{\overline{AB}_{g_1}} = \dfrac{\overline{C'D'}_{g_2}}{\overline{CD}_{g_1}} = k$ est appelé **rapport de projection** de d_1 sur d_2.

Ce rapport est indépendant du choix des points mais pas des graduations choisies.

THEOREME 3 Réciproque du théorème de Thalès

Pour $A \neq B$ et $A' \neq B'$, si A' et B' sont les images des points A et B par une projection parallèle p_d de d_1 sur d_2, $C \in d_1$, $C' \in d_2$ et $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$ alors $C' = p_d(C)$.

THEOREME 4 (du 3ème côté d'un triangle)

Dans un triangle ABC, si $D \in (AB)$, $D' \in (AC)$ et $(DD') \parallel (BC)$, alors $\dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|} = \dfrac{|\overline{AD'}|}{|\overline{AC}|} = \dfrac{\delta(A,D)}{\delta(A,B)} = \dfrac{\delta(A,D')}{\delta(A,C)} = \dfrac{\delta(D,D')}{\delta(B,C)}$ et réciproquement.

Exercices

30 *Le quadrilatère convexe* ABCD *est un* ***trapèze*** *si* $(AB) \parallel (CD)$.

Dans un trapèze ABCD *on donne* $O \in (AC) \cap (DB)$, $\delta(O,A) = 5$, $\delta(O,C) = 3$, $\delta(O,D) = 2$, $\delta(A,B) = 6$. *Calculer* $\delta(O,B)$, $\delta(D,C)$.

31 *Dans un triangle* ABC, A', B', C' *sont les milieux respectifs de* [B,C], [C,A] *et* [A,B] , $p_{(AA')}(C') = D \in (BC)$, $p_{(AA')}(B') = E \in (BC)$ *et* $G \in (BB') \cap (AA')$. Comparer $\overline{BD}$, $\overline{DA'}$, $\overline{A'E}$ *et* $\overline{EC}$. *Evaluer:* $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BE}}$, $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{BE}}$, $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BB'}}$ *; reconnaître un théorème sur les médianes.*

32 *On donne* $A \neq B$. *Construire un point* $M \in (AB)$ *tel que* $\overline{MA} = 3\,\overline{MB}$.

a) avec Chasles et une graduation g *de repère* (A,B) *;*

b) avec une droite auxiliaire (AB') *sur laquelle on porte* B' *et* C' *tels que* $\delta(A,B') = 2$, $\delta(B',C') = 1$ *et* $B' \in [A,C']$.

33 *Avec* $A \neq B$, *construire avec la règle et le compas un point* $C \in (AB)$ *tel que* $\delta(A,C) = \frac{3}{7}\,\delta(A,B)$. *Y a-t-il plusieurs choix pour* C*? Justifier la construction.*

34 *On donne* $A \neq B$. *Construire un point* $M \in (AB)$ *tel que* $\overline{MA} = 4\,\overline{MB}$; $\overline{MA} = -4\,\overline{MB}$; $2\,\overline{MA} - 4\,\overline{MB} = 0$; $3\,\overline{MA} - 8\,\overline{MB} = 0$; $3\,\overline{MA} + 9\,\overline{MB} = 0$, $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{1}{3}$.

Si $\alpha\,\overline{MA} + \beta\,\overline{MB} = 0$, *alors* M *se nomme* ***barycentre*** *des points* A *et* B *affectés des coefficients respectifs* α *et* β.

Pour quel choix de α *et* β *peut-on trouver un barycentre, est-il unique? Peut-on poser* $A = B$?

35 *Si* $A \in]B,C[$, $\delta(A,B) = a$ *et* $\delta(B,C) = b$, *construire un segment de longueur* $x = \dfrac{a^2}{b}$. *Utiliser* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{b}$. *Application*: a = 4 et b = 10.

36 *Construire le segment qui est la moyenne arithmétique de deux segments donnés.*

37 *Si* g_1 *et* g_2 *sont les graduations respectives de* d_1 *et* d_2, *et* A', B', C' *les images respectives de* A, B, C *par une projection parallèle de* d_1 *sur* d_2, $g_1(A) = 2$, $g_1(B) = 7$, $g_1(C) = 13$, $g_2(A') = -3$, $g_2(B') = -5$, *trouver* $g_2(C')$.

Quel est le rapport de projection k *de* d_1 *sur* d_2, k' *de* d_2 *sur* d_1. *Démontrer que* k *ne dépend pas des points choisis, mais dépend du choix des graduations.*

Avec $g'_1(M) = \alpha \cdot g_1(M) + \beta$, *pour quel choix de* α *et* β *ce rapport est-il invariant?*

38 *Si* ABCD *est un trapèze avec* (DC) ∥ (AB), $F \in [D,C]$, $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\delta(A,E) = 3\,\delta(D,F)$, (BC) ∥ (FE) *et* $G \in (DB) \cap (FE)$, *alors:*

a) $\overline{GE} = -3 \cdot \overline{GF}$, $\overline{GB} = 3 \cdot \overline{DG}$ *et* $\delta(B,C) = 4\,\delta(G,F)$.

b) Si $\{H\} = (AD) \cap (EF)$, *on a* $\dfrac{\overline{HE}}{\overline{HF}} = 3$

39 *Si* $a \cap b = \{O\}$, $\{A,B,C\} \subset a - \{O\}$, $\{A',B',C'\} \subset b - \{O\}$, (AB') ∥ (BA') *et* (B'C) ∥ (BC') *alors* (AC') ∥ (CA').

40 *Construire* D *si* $12\,\overline{DA} + 2\,\overline{DB} = 0$ *et* $A \neq B$. *On choisit alors* $\delta(A,D) = 2$, $\delta(A,B) = 14$, $C \notin (AB)$, $\delta(A,C) = 16$, $F = p_{(BC)}(D) \in (AC)$, $C \in [A,E]$, $\delta(C,E) = 12$ *et* $M \in (DE) \cap (BC)$. *Calculer* $\delta(F,C)$ et $\dfrac{\overline{MD}}{\overline{ME}}$. *En déduire que* M *est barycentre de* D *et* E *affectés des coefficients* 7 *et* 8. *Démontrer que l'on a* $\dfrac{\delta(M,D)}{\delta(M,E)} = \dfrac{\delta(A,C)}{\delta(A,B)}$. *Si* $\delta(D,F) = 4$, *calculer* $\delta(B,C)$ *et* $\delta(M,C)$.